Les ensembles de nombres

# Les ensembles de nombres et leurs notations

## Notations

Un ensemble est constitué **d’éléments**.

Exemples :

## Les entiers naturels

Les premiers nombres utilisés sont les entiers 0,1,2….. On les appelle les entiers naturels.  
Il y a une infinité d’entiers naturels, l’ensemble qu’ils forment est noté ℕ.

Définition : On appelle ℕ l’ensemble des entiers naturels, le plus petit entier naturel est 0.

↦Si l’on considère les entiers naturels non nuls (c’est-à-dire tous sauf 0) on note cet ensemble :ℕ∗

↦D’une manière générale et par convention, écrire un ensemble avec le symbole \* signifie que le nombre 0 est exclu de cet ensemble.

En profiter pour parler de ℕ\{0} ou ℕ\{1}….. + Parler du rôle des {…} et du symbole ⊂

Exercice :

a- On considère l’ensemble A des entiers positifs ou nuls inférieurs ou égaux à 3, donner l’écriture ensembliste de l’ensemble A.

b- Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi  les phrases suivantes :

2….A ; 7…..A ; {1}….A ; {2 ;6}…..A

2….ℕ ; {2 ;6}….ℕ ; A…ℕ ; -1…..ℕ 1000  .... ℕ

## Les entiers relatifs

Résoudre dans ℕ les équations suivantes :

· Il y a donc nécessité de considérer les entiers relatifs, un entier relatif est constitué d’un signe « - » ou d’un signe « + » (ne s’écrivant pas par convention) et d’un entier naturel, l’ensemble qu’ils forment est noté ℤ.

Zahl (nombre) Zahlen (compter)

Définition : On appelle ℤ l’ensemble des entiers relatifs, il n’y a pas de plus petit ni de plus grand entier relatif.

↦ L’ensemble des entiers relatifs non nuls est noté : ℤ\* , celui des entiers relatifs strictement négatifs est noté : et celui des entiers relatifs strictement positifs : .

Exercice :

Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi les phrases suivantes :

2….ℤ ; ℕ….ℤ ; {-1 ;1}….ℤ ; ; ….ℤ ; ….ℤ ;

….ℤ .

## Les rationnels

Résoudre l’équation, la ou les solutions appartiennent-elles à ℕ ? à ℤ ?

Définition :

* On appelle rationnel tout nombre pouvant s’écrire sous la forme d’une fraction de deux entiers avec et .
* On note ℚ l’ensemble des nombres rationnels.

Exercice : Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi les phrases suivantes:

2 … ℚ ; −5 …. ℚ ; …. ℚ ; … ℚ ; ℕ …. ℚ ;   
…ℚ ℤ …. ℚ

Propriété 1 : Entre deux nombres rationnels, il existe une infinité de nombres rationnels

Exercice : déterminer 5 rationnels distincts compris entre .

­

Propriété 2 : Parmi les rationnels, ceux qui admettent une écriture fractionnaire avec une puissance de 10 au dénominateur sont appelés des décimaux, cet ensemble est noté ⅅ.

Exemples : Parmi les rationnels suivants, quels sont ceux qui sont aussi des nombres décimaux ?

## Les nombres réels

Définition : L’ensemble de tous les nombres vus au collège est l’ensemble des nombres réels noté . On le représente à l’aide d’une droite graduée.

Résoudre l’équation suivante et préciser la nature de ses solutions:

Rappel de la méthode à utiliser : pour résoudre des équations du type avec a ≥ 0, il faut transposer l’un des deux membres, l’autre membre devenant alors 0 puis factoriser l’expression obtenue de façon à utiliser la règle : « un produit est nul si et seulement si l’un des facteurs est nul »

De même résoudre,

L’ensemble formé par tous les rationnels et les irrationnels (c’est-à-dire ceux qui ne sont pas rationnels) est l’ensemble de tous les nombres que vous connaissez jusqu’à aujourd’hui, on le note ℝ, les réels.

Définition : On appelle ℝ l’ensemble des nombres réels (ou réels).

Exercice :

1- Compléter en utilisant le symbole qui convient parmi les phrases suivantes:

2 .… ℝ ; ….. ℝ ……ℝ ; ….. ℝ ; ℚ …. ℝ ; {1 ;-6} ….. ℝ

2- Représenter le diagramme de Venn représentant les ensembles définis ci-dessus.

CONCLUSION : ℕ ℤ ⅅ ℚ ℝ

# Intervalles de R

Définition : L’ensemble des nombres réels compris entre deux nombres a et b est noté [a,b] ; c’est l’intervalle qui désigne tous les nombres réels x tel que .

Définition : On appelle intervalle de ℝ, toute partie de ℝ définie par **une et une seule** inégalité ou **un et un seul** encadrement.

Exemple :

· L’ensemble des réels x tels que x ≥ 2 est un intervalle de ℝ

· L’ensemble des réels y tels que −1 < y ≤ 5 est un intervalle de ℝ

· Contre-exemple : l’ensemble des réels t tels que t > 2 ou t ≤ −1 n’est pas un intervalle de ℝ.

Le tableau suivant représente les 8 différents types d’intervalles :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Notation** | **Nombre x** | **Représentation sur un axe** |
| [a ; b] |  |  |
| ]a ; b[ |  |  |
| ]a ; b] |  |  |
| [a ; b[ |  |  |
| [a ; + |  |  |
| ]a ; + |  |  |
| ]- |  |  |
| ]- |  |  |

**Remarque** : On dit qu’un intervalle est fermé si ses extrémités appartiennent à l’intervalle. Ex : [-2 ; 7 ] est un intervalle fermé.

On dit qu’un intervalle est ouvert si ses extrémités n’appartiennent pas à l’intervalle.  
Ex : ] -2 ; 7 [ ou ] 6 ; + [ sont des intervalles ouverts.

# Réunion et intersection

Définition 1 : Soient A et B deux ensembles, on dit que A est **inclus** dans B lorsque tous les éléments de A sont des éléments de B. On note A ⊂ B.

Définition 2: **L’intersection** de deux ensembles A et B est l’ensemble des éléments qui sont en commun à A et à B. On note cette intersection.

Exemple :

* Soit A = [-2 ; 1] et B =] 0 ; 5 [

A B =

* A = ℕ et B= {-4 ;-2 ; 0 ; 2 ; 4} alors A B= {0 ; 2}
* A = {-1 ; 7} et B = [0 ; 3] alors A B = { }

Définition 3 : La **réunion** de deux ensembles A et B est l’ensemble des éléments qui appartiennent à A OU à B. On note cette intersection.

Exemples :

* Soit A = [-2 ; 1] et B =] 0 ; 5 [

A U B =

* A = ℕ et B = {- 4 ;-2 ; 0 ; 2 ; 4} alors, A U B = {- 4 ; -2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; … …} = ℕ U {-4 ; -2}

**Remarque** : L’ensemble vide se note .